Correction Devoir maison n°2

Exercice 1 - Démonstration par récurrence

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{4^n \geq 1 + 3n\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $4^0 = 1 \geq 1 + 3 \times 0$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} & 4^n \geq 1 + 3n \\ \Longrightarrow \quad & 4^{n+1} \geq 4(1+3n) \\ \Longrightarrow \quad & 4^{n+1} \geq 4 + 12n \geq 4 + 3n \\ \Longrightarrow \quad & 4^{n+1} \geq 1 + 3(n+1) \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 4^n \geq 1 + 3n}$.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{1 \leq u_n \leq e\}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 = 1$, $1 \leq u_0 \leq e$ et donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} & 1 \leq u_n \leq e \\ \Longrightarrow \quad & 0 \leq \ln(u_n) \leq 1 \\ \Longrightarrow \quad & 0 \geq -\frac{1}{2}\ln(u_n) \geq -\frac{1}{2} \\ \Longrightarrow \quad & 2 \geq 2 - \frac{1}{2}\ln(u_n) \geq \frac{3}{2} \\ \Longrightarrow \quad & e \geq u_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq e}$.
3. La suite de Fibonacci (u_n) est défini par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$. On démontre par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.
   - On cherche à montrer les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n \in \mathbb{N}\}$.
   - **Initialisation :** Les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies puisque $u_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$.
   - **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies pour un certain rang n. On veut montrer que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie. On a donc $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Or, comme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ on a $u_{n+2} \in \mathbb{N}$. La somme de deux entiers est un entier. La proposition $\mathscr{P}_{n+2}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}.}$

Exercice 2 - Fonctions et suites

Partie 1

On considère la fonction $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$.

1. On résout $e^x + e^{-x} > 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.

$$\boxed{\text{Donc le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}.}$$

2. Le domaine de définition de f est symétrique. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(e^{-x} + e^{-(-x)}) \\ &= \ln(e^{x} + e^{-x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Or $e^x + e^{-x} > 0$,on s'intéresse alors au numérateur. On résout

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \geq 0 &\iff e^x \geq e^{-x} \\ &\iff e^{2x} \geq 1 \\ &\iff 2x \geq 0 \\ &\iff \boxed{x \geq 0} \end{aligned}$$

On calcule les limites

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

De même

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$$

Enfin, $f(0) = \ln(e^0 + e^{-0}) = \ln(2)$. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On calcule pour x réel,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln(e^x + e^{-x}) - x \\ &= \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - x \\ &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\ &= x + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\ &\boxed{= \ln(1 + e^{-2x})} \end{aligned}$$

5. On a
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0, \quad \lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$$
Finalement
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x})=0.}$$
On a également
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} 1+e^{-2x}=+\infty$$
Finalement
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-2x})=+\infty.}$$

6. On a $f(x)>x \iff f(x)-x>0$. On pose alors la fonction $g(x)=f(x)-x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout x réel,
$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)-1\\ &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-1\\ &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\\ &= \frac{-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}<0 \end{aligned}$$
La fonction g est donc strictement décroissante. les limites ayant été étudiés précédemment, on a le tableau de variation

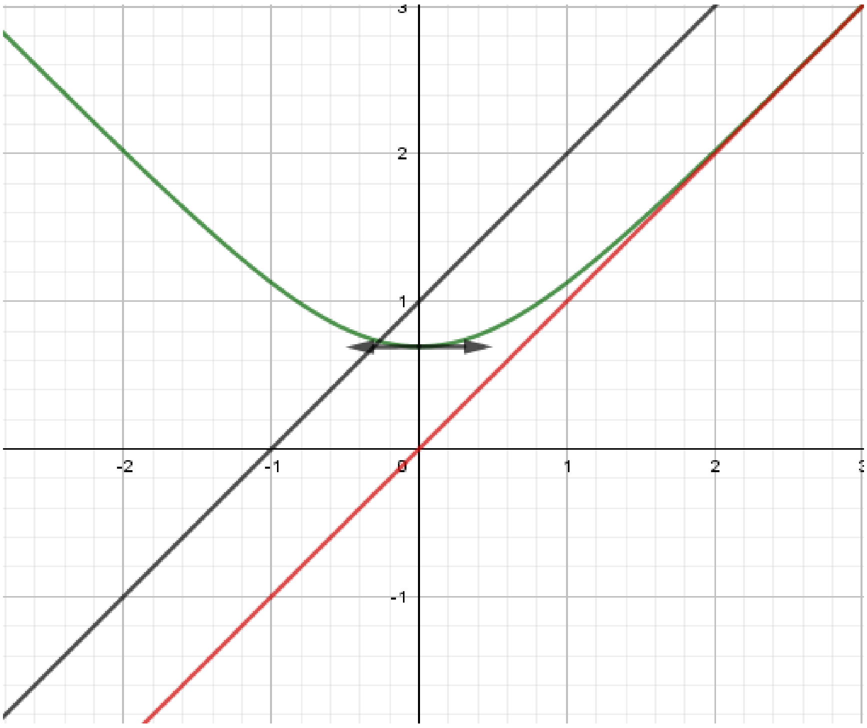
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$+\infty$ ↘ 0

La fonction g est ainsi toujours positive. Par conséquent,
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f(x)>x.}$$

7. On résout
$$\begin{aligned} f(x)<x+1 &\iff \ln(e^x+e^{-x})<x+1\\ &\iff e^x+e^{-x}<e^{x+1}\\ &\iff e^x-e\times e^x+e^{-x}<0\\ &\iff (1-e)e^x+e^{-x}<0\\ &\iff (1-e)e^{2x}+1<0\\ &\iff -(e-1)e^{2x}<-1\\ &\iff e^{2x}>\frac{1}{e-1}\\ &\iff 2x>\ln\left(\frac{1}{e-1}\right)\\ &\iff x>\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \mathcal{S} = \left]\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e-1}\right); +\infty\right[.}$$

8. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f, $y = x$ et $y = x + 1$.



Partie 2

Étude de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) \end{cases}$

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n \text{ est bien définie et } u_n \geq 0\}$.
   - **Initialisation :** $u_0 = 0$ donc u_0 est bien défini et $u_0 \geq 0$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe car la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus

     $$\begin{aligned} & u_n \geq 0 \\ \Longrightarrow \quad & f(u_n) \geq f(0) \quad f \text{ croissante sur } [0; +\infty[\end{aligned}$$

     Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = \ln(2) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$. Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\, u_n \text{ existe et } u_n \geq 0}$.
2. D'après la partie A, pour tout x réel, $f(x) \geq x$. En prenant $x = u_n$, on a

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$
3. D'après la partie A,pour tout x positif, $f(x) < x + 1$. En prenant $x = u_n$, on a

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n + 1.}$$
4. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n < n + 1\}$.
   - **Initialisation :** $u_0 = 0$ donc $u_0 < 1$ donc l'initialisation est vérifié.

- **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} & u_n < n+1 \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} < u_n + 1 < n+1+1 \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} < n+1+1 \end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n < n+1}$.

5. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{u_n \leq \ln(n+1)\}$.
   - **Initialisation :** $u_0 = 0$ et $\ln(0+1) = 0$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} & u_n \leq \ln(n+1) \\ \Longrightarrow \quad & e^{u_n} \leq n+1 \\ \Longrightarrow \quad & e^{u_n} + e^{-u_n} \leq n+1+1 \quad \text{car} e^{-u_n} \leq 1 \\ \Longrightarrow \quad & \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) \leq \ln(n+2) \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \leq \ln(n+2) \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n < n+1}$.

Exercice 3 - Scilab

Les 3 questions sont indépendantes et par ordre de difficulté croissante.

1. On considère le programme

```
a = input('Entrez un réel')
b = 4*a^2
a = b - 4*a
a = a +1
disp(a)
```

   (a) Le programme ci-dessus demande à l'utilisateur d'entrer un réel a et calcule $4a^2 - 4a + 1$.

   (b) Si l'utilisateur rentre la valeur 2, $\boxed{\text{le programme affiche 9}}$.

   (c) On résout $4a^2 - 4a + 1 = 4 \iff (2a-1)^2 = 4 \iff (2a-1)^2 - 2^2 = 0 \iff (2a-3)(2a+1) = 0$. L'ordinateur renvoie la valeur 4 pour les valeurs de $\boxed{a = 3/2 \text{ ou } a = -1/2.}$

2. Au 18 Aout 2020, le taux de change entre l'euro et les dollars américains, les livres sterling ou les roupies indiennes sont les suivants
   — 1 EUR = 1,1960 USD
   — 1 EUR = 0,9042 GBP
   — 1 EUR = 89,2231 INR
   Recopiez et complétez le programme suivant afin que lorsqu'un utilisateur entre une somme en euro et la monnaie dans laquelle il veut le change, il obtienne l'argent changé.

```
eur = input("Entrez la somme en euros")
change = input ("Entrez 1 si vous souhaitez obtenir le change en dollar. Entrez 2
si vous souhaitez obtenir le change en livres. Enfin, entrez 3 si vous souhaitez
obtenir le change en roupies.")
```

```
USD = ... 1.1960*eur ...
GBP = ... 0.9042*eur ...
INR = ... 89.2231*eur ...

if change == .. 1 .. then
    print("Avec " + str(..eur..) + " euros, vous obtenez " + str(USD) + " dollars")
elseif change == .. 2 .. then
    print("Avec " + str(.. eur ..) + " euros, vous obtenez " + str(GBP) + " livres")
else
    print("Avec " + str(.. eur ..) + " euros, vous obtenez " + str(INR) + " roupies")
```